

# ソフトマター物理学からの粘弾性

一ノ瀬 祥一

December 7, 2010

静岡県立大学、食品物理学研究室  
平成22年12月7日

# 1. はじめに

Figure 1: 水道の蛇口からしずくがポタリ、ポタリ

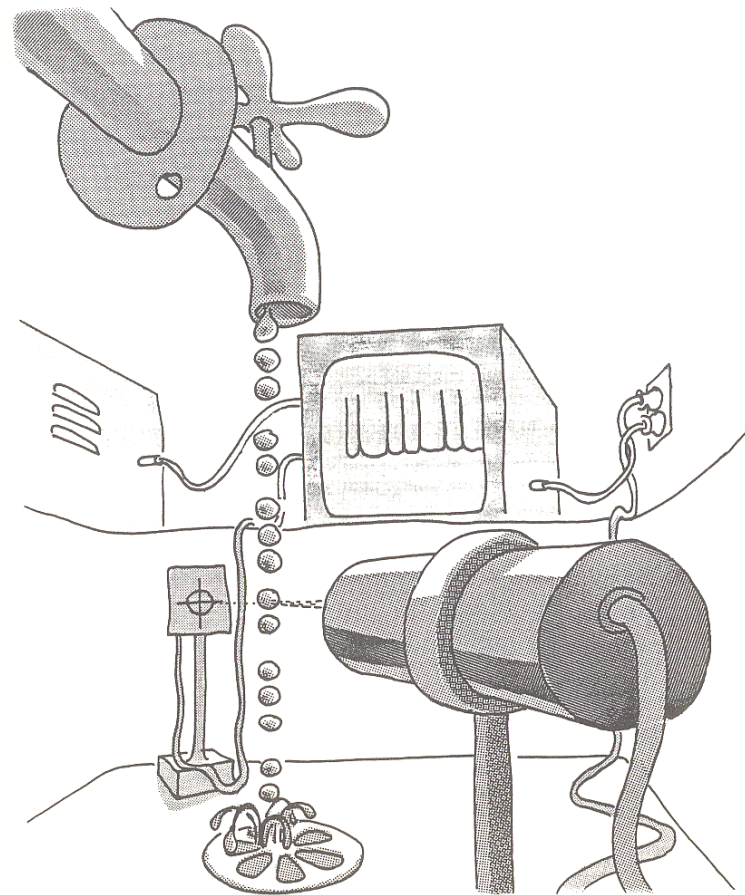


図1 実験装置(イラストは Chris Shaw による).

台所の蛇口から、閉めが足りなかったせいで、水のしずくがポタリ、ポタリと落ちているのはよく経験することで、誰も不思議とは思わない。しかしこの現象はとても深遠な物理を呈していることが知られている。

水滴系のカオス R. Shaw 1984

ムービー多数

## 2 . ソフトマター物理学

### 様々な側面から特徴付けられている

- 複雑系 : 多体 ( モル数のオーダー ) による統計性、ゆらぎ
- メソスコピック : スケール 10 - 1000 nm
- 非線形 : 速度  $v$  について、 $v^2$  ,  $v^3$  , ...
- 非平衡 : 時間的に不規則、空間的に不規則
- 散逸系 : 摩擦 friction、熱放射 ( 電磁放射 )

- カオス : 非決定論、不安定性

- ナノテク : ナノスケール

---

## 高度な数理解析が要求される

- 統計処理

- 境界条件

- コンピューター計算

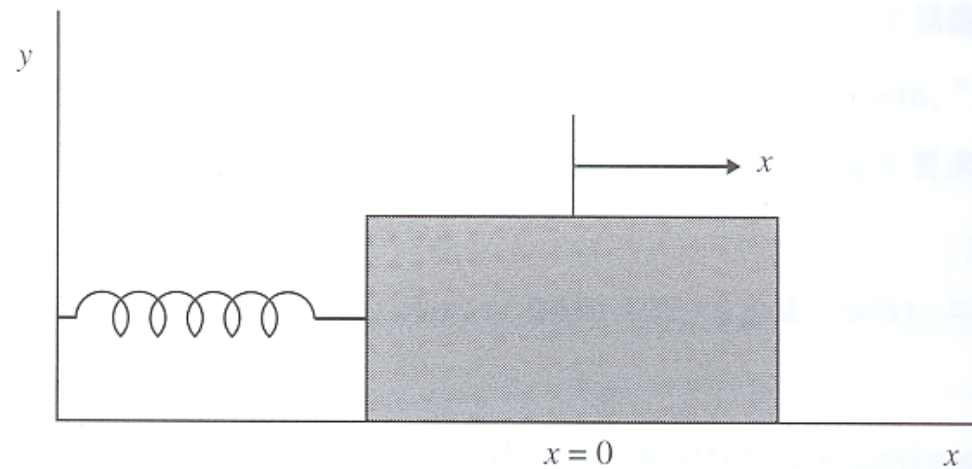
---

## 原理的に未知の部分が多い

cf. ニュートン力学、量子力学

### 3 . ばね弾性運動、振り子の運動

Figure 2: ばねの運動



ばね弾性運動

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x - \gamma\frac{dx}{dt}, \quad \omega^2 : \text{角振動数}, \quad \gamma : \text{抵抗係数}$$

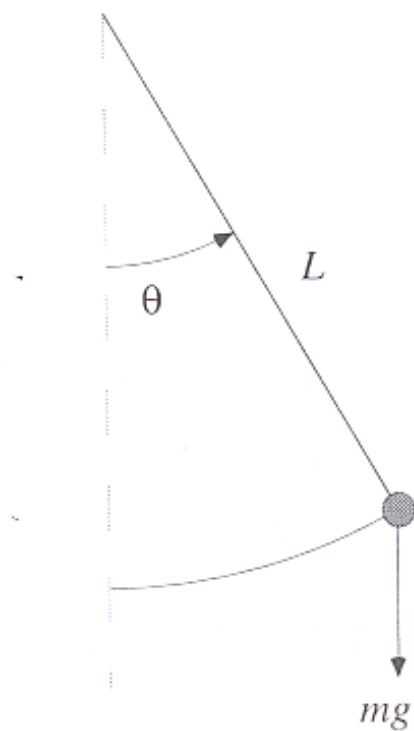
加速度      復元力      抵抗

(1)

## 振り子の運動



Figure 3: 振り子の運動

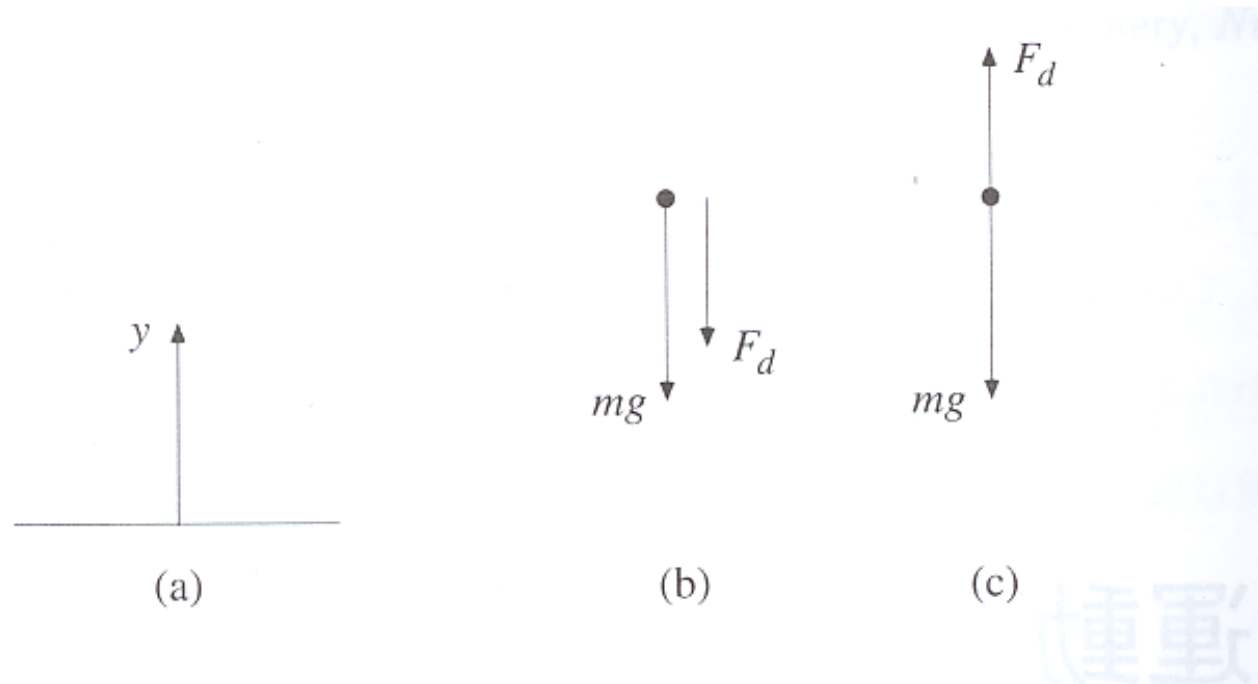


$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin\theta$$

加速度      接線方向の力      (2)

## 4 . 自由落下、雨滴の運動

Figure 4: 雨滴の運動



$$\frac{d^2x}{dt^2} + G + \gamma \frac{dx}{dt} = 0$$

加速度      重力      抵抗

(3)

## 5 . 食品の粘弾性

ニュートン流体 例： 水、牛乳、シロップ、コンソメスープ

$$\text{応力 } P = \eta \frac{dv}{dx}, \quad v(x) : \text{流速}, \quad \eta : \text{粘性係数}$$

$$\text{水 } \eta = 1.792 \text{ mPa} \cdot \text{s}(0\text{C}), 0.890 \text{ mPa} \cdot \text{s}(25\text{C}), 0.282 \text{ mPa} \cdot \text{s}(100\text{C}) \quad (4)$$

非ニュートン流体 例： トマトソース、マヨネーズ、練乳

$$\text{応力 } P = \mu \left( \frac{dv}{dx} \right)^n, \quad n : \text{流動性指数}, \quad \eta_{app} \equiv \mu \left( \frac{dv}{dx} \right)^{n-1} : \text{みかけの粘性係数} \quad (5)$$

	$\eta_{app}$ mPa·s(20 C)	$n$
オレンジジュース	$2.9 \times 10$	0.560
中濃ソース	$1.1 \times 10^3$	0.654
濃厚ソース	$4.0 \times 10^3$	0.549
---	---	---

ディラタンシー  $n > 1$ , ずり速度増大とともにみかけの粘度が大きくなる

速度勾配 ( $\frac{dv}{dx}$ ) を変化させた時、応力を測定すると、履歴現象を呈するものがある。

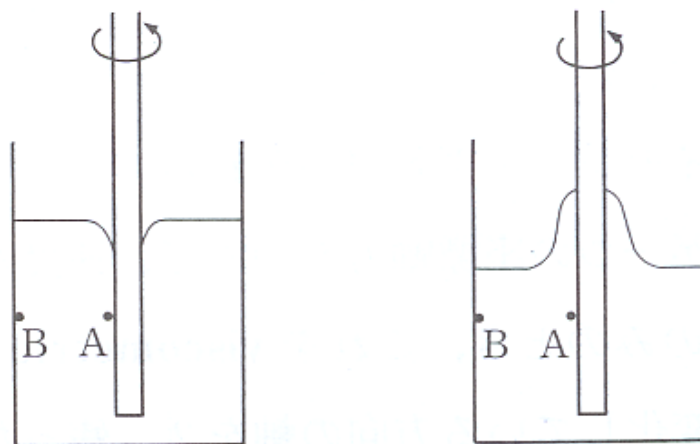
チキソトロピー  
レオペクシー

ソフトな食感  
重厚な食感

ワイゼンベルグ効果

山芋のすりおろし

Figure 5: ワイゼンベルグ効果



(a) ニュートン流体 (b) 非ニュートン流体

図 4.4 ワイゼンベルグ効果

溶けたチョコレートやホワイトソースなどに成り立つ有名な関係式 **Casson** の

式 1957

$$\sqrt{P} = a + b \sqrt{\frac{dv}{dx}} \quad (6)$$

非ニュートン流体では応力  $P$  と速度勾配  $\frac{dv}{dx}$  の関係が独特（いろいろなタイプ、非線形）である。



## 6 . 粘弾性物性解析の食品関連現場での実状

### マックスウェルモデル

Figure 6: マックスウェルモデル



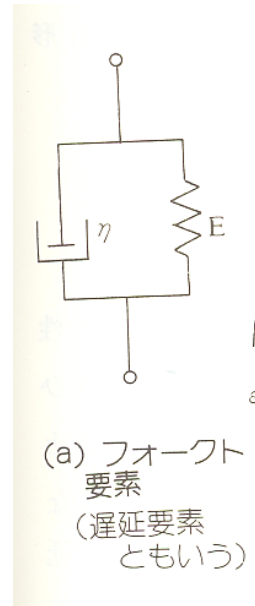
(a) マックスウェル要素  
(緩和要素ともいう)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{\eta} P(t)$$

$\varepsilon(t)$  : 変形率       $E$  : ヤング率 (弾性率)      (7)

フォークトモデル

Figure 7: フォークトモデル



$$P(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (8)$$

## 欠点

- 速度の場  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  での力学法則に基づいていない
- 線形の範囲（微小応力、微小変形）のみ有効

電荷流動の場合との比較

電荷の流れ（電流  $I$ ）に伴う抵抗  $R$  に対し **オームの法則**  $V = IR = R \frac{dQ}{dt}$  が成り立つが、この場合、力学法則  $m(d^2\vec{r}/dt^2) = -(m/\tau)(d\vec{r}/dt) + e\vec{E}$  に基づいている。

## 7 . 実在気体（粘弾性気体）

実在気体の状態方程式 van der Waals 1873

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad , \quad V : 1 \text{ mol の体積}, \quad R : \text{気体定数} \quad (9)$$

	$a$ atm·cm <sup>6</sup> /mol <sup>2</sup>	$b$ cm <sup>3</sup> /mol
He	0.03415×10 <sup>6</sup>	23.71
Ne	0.2120×10 <sup>6</sup>	17.10
O <sub>2</sub>	1.361×10 <sup>6</sup>	32.58
CO <sub>2</sub>	3.959×10 <sup>6</sup>	42.69
---	---	---

- 種々の気体を2つのパラメーター  $a, b$  で "統一" している。 $a$  の意味：分子間引力、 $b$  の意味：分子サイズ。数理モデル化に成功している。
- $P, V, T$  は気体の（平衡）状態を表す変数（気体全体 global な量、静的）
- 気体と液体の2相共存平衡系もカバーしている。臨界状態  $P_c, V_c, T_c$

## 8 . 粘性流体 of 方程式

Newton 流体に対し、連続な速度場（層流を仮定） $\vec{v}(t, \vec{r})$  は以下に従う。  
ナビア-ストークス方程式

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} + \vec{K}, \quad \Delta = \vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)^2$$

”相対論的”加速度      圧力項      粘性力      外力

$P(t, \vec{r})$  : 圧力場,  $\vec{K} = (0, 0, -g)$  : 重力,  
 $\eta$  : 粘性係数 (定数),  $\rho$  : 密度 (定数) (10)

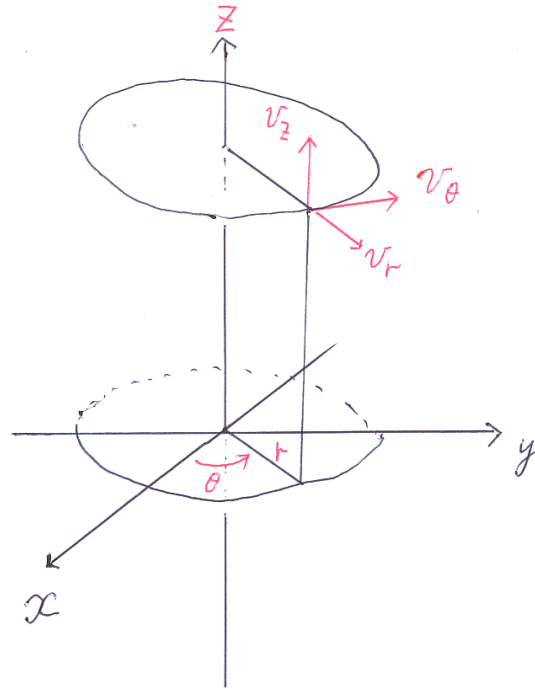
質量の保存を表す式（連続の式）は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (11)$$

（ 1 ） 軸対称、定常、非圧縮、 $v_r = 0$ ,  $v_z = 0$ （回転粘度計用）



Figure 8: 円筒座標



$\frac{\partial v_\theta}{\partial z} = 0$  の近似で

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad \frac{1}{r} v_\theta^2 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, & \text{(B)} \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} \right] &= 0, & \text{(C)} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= -g \\ v_\theta &= v_\theta(r), & P &= P(r, z) \end{aligned} \quad (12)$$

粘性係数  $\eta$  現れない。この方程式系は厳密に解ける。

Figure 9: 回転する流体

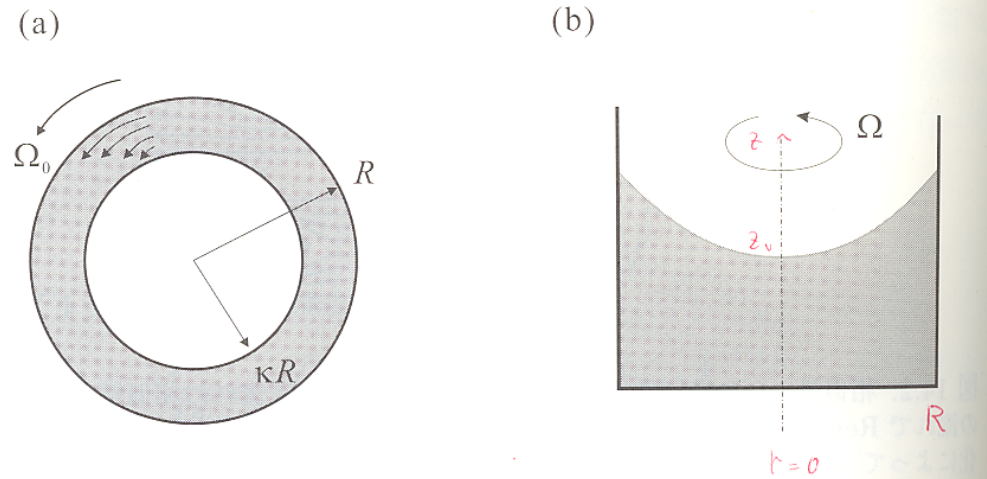


図 14.3: 回転する流体. (a) 2重回転ドラム内の流れ. (b) 回転ドラム内の自由液面.

Step 1 (B) より

$$r v_{\theta} = \frac{\Omega_0}{1 - \kappa^2} (r^2 - \kappa^2 R^2)$$

境界条件：円筒内面  $r = R$  で  $v_{\theta} = \Omega_0$ ，固定中心軸  $r = \kappa R$  ( $0 < \kappa < 1$ ) で  $v_{\theta} = 0$  (13)

Step 2 (A),(C) より

$$P(r, z) - P_0 = -\rho g z + \rho \left( \frac{\Omega_0}{1 - \kappa^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} (r^2 - R^2) - 2\kappa^2 R^2 \ln \frac{r}{R} - \frac{\kappa^4}{2} R^2 \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \right\}$$

境界条件：円筒内面  $r = R$  で高さ  $z = 0$  で  $P = P_0$  (大気圧) (14)

従い、自由液面の形は  $P(r, z) = P_0$  より

$$\rho g z = \rho \left( \frac{\Omega_0}{1 - \kappa^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} (r^2 - R^2) - 2\kappa^2 R^2 \ln \frac{r}{R} - \frac{\kappa^4}{2} R^2 \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \right\} \quad (15)$$

(2) 軸対称、非定常、非圧縮、 $v_\theta = 0$  (水滴の運動、毛細管内の水の流れ)

$$(A) \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v_r + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\},$$

$$(B) \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\} - g,$$

$$(C) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad . \quad (16)$$

毛細管の流れ(定常)に適用すると(重力  $g=0$  とし、 $v_r = 0, \partial P/\partial r = 0, \partial v_z/\partial z = 0$  の近似OK) (B)より

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad . \quad \rho \text{に依らない} \quad (17)$$

ここでz軸方向（毛細管の方向、水平方向）の圧力勾配 $\partial P/\partial z$ は定数とみなせる。ゆえに

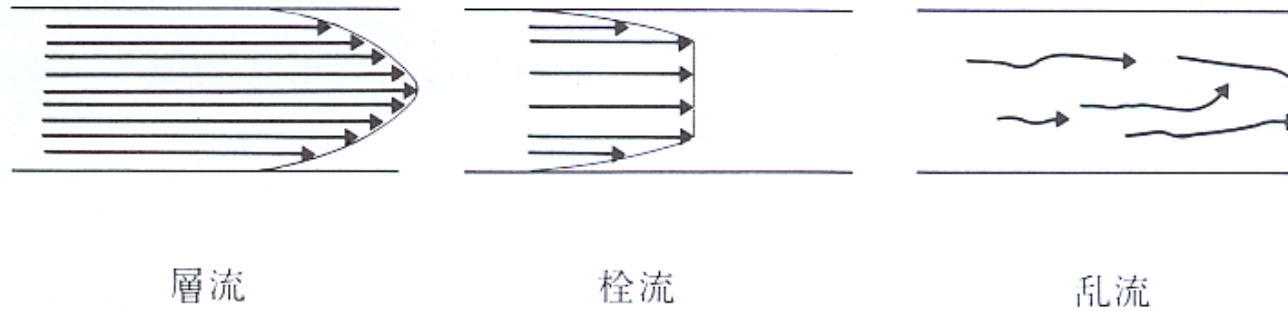
$$\eta v_z = \frac{r^2 - a^2}{4} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{P_1 - P_0}{l}, \quad (P_1 : \text{入口の圧力}, P_0 : \text{出口の圧力})$$

境界条件 :  $r = 0$  で  $\partial v_z / \partial r = 0$  ,  $r = a$  で  $v_z = 0$  (18)

Figure 10: 毛細管内の速度分布

$$\text{Reynolds' number} = \frac{p_t r^3 \rho}{4 L \eta^2}$$

なおレイノルズ数が無次元量であることに注意。



\* 2 Hagen-Poiseuille's law

非ニュートン流体へ拡張できれば、納豆\*水飴の糸ひき、リング法、プリンの変形などへ適用できる。

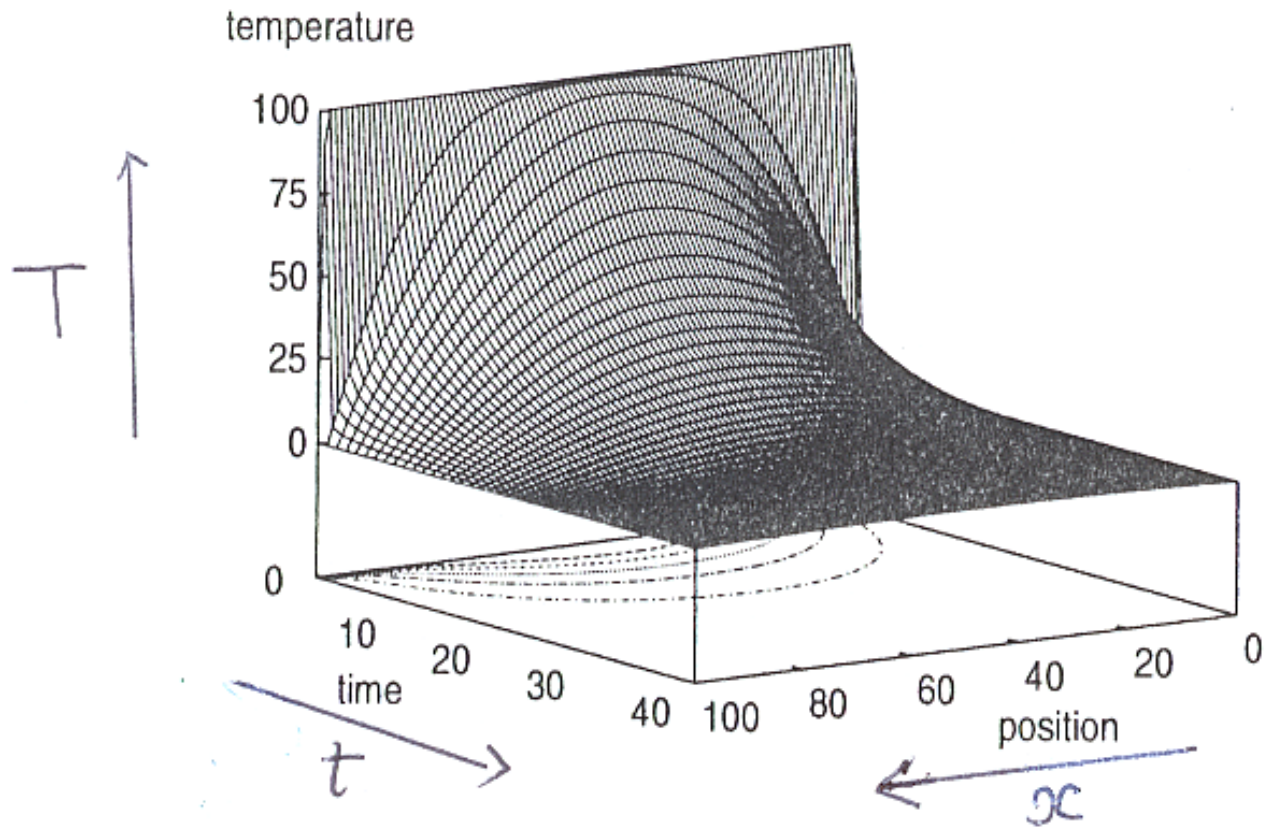
Navier-Stokes 方程式 (10) のシュミレーション

現在研究が進行中。ここでは速度が緩やかな場合、主要部分は熱伝導方程式になることに注目し、以下のシュミレーション結果を示す。

$$\text{一次元熱伝導方程式} : \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = (\text{熱伝導係数}) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (19)$$



Figure 11: 細い鉄の棒に対する熱伝導シミュレーション



## 9 . 結び

Figure 12: 天の川銀河、直径約 10 万光年

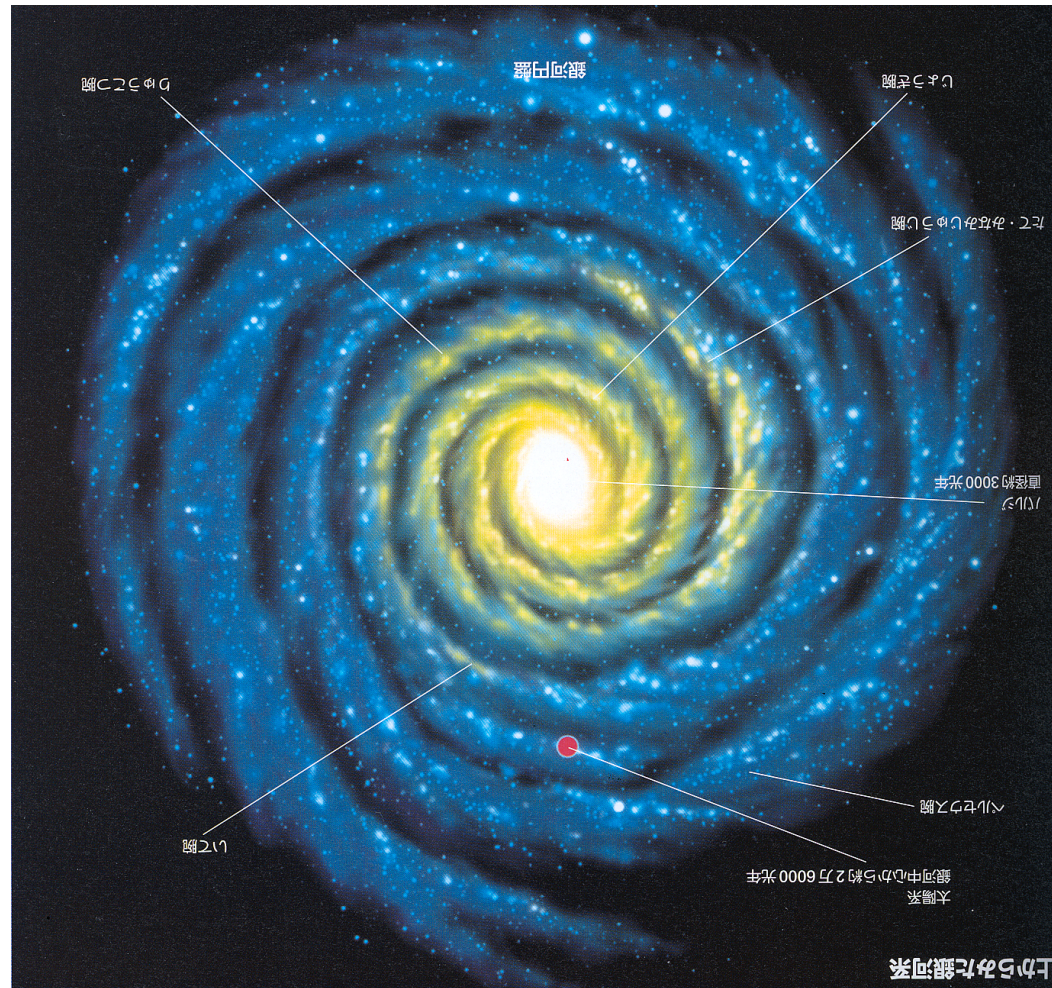


Figure 13: 国際会議 「摩擦の科学」

The International Conference on  
Science of Friction 2010 (ICSF2010)

主催	愛知教育大学
共催、協賛	(予定)日本トライボロジー学会
開催期日	2010年9月13日(月)~18日(土)
開催場所	合歓の郷 (ねむのさと) 〒517-0403 三重県志摩市浜島町迫子2692-3
内容	<p>本会議は摩擦現象を原子・分子レベルから取り扱います。主なトピックは次の通りです。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 超潤滑と摩擦</li> <li>(2) 摩擦の電子・フォノン散逸過程</li> <li>(3) 原子・分子スケールの摩擦</li> <li>(4) ファンデルワールス摩擦とカシミール力</li> <li>(5) 分子モーターと摩擦</li> <li>(6) ナノスケールでの摩擦と亀裂</li> <li>(7) ソフトマターの摩擦と凝着</li> <li>(8) 原子スケールでの摩擦の理論的研究とエネルギー散逸</li> <li>(9) 摩擦とカオス</li> <li>(10) ナノスケール接触の力学的性質</li> <li>(11) 粉体の摩擦</li> </ol>